Републичко такмичење талентованих ученика средњих школа

РЕШЕЊА теста из МАТЕМАТИКЕ за III разред средњих школа 22. мај 2022.

1. Ако је права $l: y = kx + n$ симетрична правој $p: 3x - 2y + 1 = 0$ у односу на тачку $M(5,1)$, онда параметар n припада скупу:

А) $\left\{-\frac{1}{2}, -\frac{17}{4}, 3\right\}$ Б) $\left\{-\frac{19}{2}, -1, \frac{10}{3}\right\}$ В) $\left\{-\frac{41}{2}, -\frac{27}{2}, 5\right\}$ Г) $\left\{\frac{5}{2}, \frac{21}{2}, \frac{37}{4}\right\}$ Д) $\{0,1,2\}$

Решење: Праве l и p су паралелне са коефицијентом правца $k = \frac{3}{2}$. Тачка $A(-1,-1)$ припада правој p, њој симетрична тачка у односу на тачку $M(5,1)$ је тачка $B(11,3)$. Тачка B припада правој l,једначина праве $l: 3x - 2y - 27 = 0$, $y = \frac{3}{2}x - \frac{27}{2}$, $n = -\frac{27}{2}$. **Одговор** В) $\left\{-\frac{41}{2}, -\frac{27}{2}, 5\right\}$

2. Дате су тачке $A(1,1)$, $B(7,4)$, $C(4,5)$. Збир координата тачке D која је четврто теме једнакокраког трапеза $ABCD$ је:

А) 2 Б) -3 В) -4 Г) 5 Д) 6

Решење: У једнакокраком трапезу $ABCD$ је $AD = BC$ и $AC = BD$. Ако је тачка $D(x,y)$, онда важи $\sqrt{(x-1)^2 + (y-1)^2} = \sqrt{10}$ и $\sqrt{(x-7)^2 + (y-4)^2} = \sqrt{25}$. Решавањем система једначина добијамо $D_1(4,0)$, $D(2,4)$. Тачка D_1 није решење, четвороугао $ABCD_1$ није једнакокраки трапез (нацртати) већ паралелограм. Решење је $D(2,4)$, $2 + 4 = 6$. **Одговор** Д) 6

3. Решења једначина $(a-1)^2 - a^2 = -7$; $b^2 - (b-5)^2 = 5$ су дужине катета правоуглог троугла. Однос површина уписаног и описаног круга троугла је:

А) $\frac{12}{5}$ Б) $\frac{4}{25}$ В) 2 Г) $\frac{3}{5}$ Д) $\frac{4}{3}$

Решење: Решење једначине $(a-1)^2 - a^2 = -7$ је $a = 4$. Решење једначине $b^2 - (b-5)^2 = 5$ је $b = 3$. Из питагорине теореме $c = 5$. Полупречници уписаног и описаног круга су $r_u = 1$, $r_o = \frac{5}{2}$. Површине уписаног и описаног круга су $P_U = \pi, P_O = \frac{25}{4}\pi$. Тражени однос је $\frac{P_U}{P_O} = \frac{4}{25}$. **Одговор** Б) $\frac{4}{25}$

4. Круг $K: (x-p)^2 + (y-q)^2 = r^2$ са центром на $x-$ оси сече хиперболу $H: 3x^2 - 4y^2 = 12$ у тачки $M(4,-3)$ под правим углом. Вредност израза $2p - q + \frac{r^2}{2}$ је:

А) 3 Б) 9 В) 11 Г) 21 Д) 25

Решење: Тангенте на круг и хиперболу у тачки M се секу под правим углом. Тангента хиперболе у тачки M је $t_H: y = -x + 1$. Коефицијент правца тангенте круга је $k_{t_k} = 1$. Једначина тангенте круга у тачки $M(4,-3)$ је $t_K: y = x - 7$. Круг садржи тачку $M(4,-3)$ и центар припада $x-$ оси, $C(p,0)$, $(4-p)^2 + 9 = r^2$ (1). Из услова додира за круг одређујемо $r^2 = \frac{(p-7)^2}{2}$ (2). Решавањем (1) и (2) одређујемо $p = 1$ и $r^2 = 18$. $2p - q + \frac{r^2}{2} = 2 + 9 = 11$. **Одговор** В) 11

5. Изводница праве зарубљене купе гради угао од $30°$ са равни основе и ако је површина њеног осног пресека Q, онда је површина њеног омотача:

А) $2Q\pi$ Б) $\frac{Q\pi}{2}$ В) $3Q\pi$ Г) $\frac{Q\pi}{4}$ Д) $\sqrt{3}Q\pi$

Решење: Полупречници доње и горње основе су r_1и r_2, површина осног пресека је површина једнакокраког трапеза, $Q = \frac{2r_1+2r_2}{2}h$; $Q = (r_1 + r_2)h$, $r_1 + r_2 = \frac{Q}{h}$(1). Изводница гради угао од $30°$ са равни основе, $\sin 30° = \frac{h}{s}$,$\frac{1}{2} = \frac{h}{s}$,$s = 2h$ (2). Површина омотача је $M = (r_1 + r_2)s\pi$. Заменом (1) и (2) израчунавамо $M = \frac{Q}{h}2h\pi$; $M = 2Q\pi$. **Одговор** А) $2Q\pi$

6. Вектори $\vec{a} = (m,1,-1)$,$\vec{b} = (3,m,2)$,$\vec{c} = (7,4,0)$ су компланарни. Косинус угла који вектор $\vec{a}$ заклапа са y - осом је:

А) $\frac{\sqrt{2}}{2}$ Б) $\frac{\sqrt{6}}{4}$ В) $\frac{\sqrt{3}}{2}$ Г) $\frac{1}{\sqrt{6}}$ Д) $\frac{3}{\sqrt{2}}$

Решење: Вектори $\vec{a} = (m, 1, -1)$, $\vec{b} = (3, m, 2)$, $\vec{c} = (7,4,0)$ су компланарни, њихов мешовити производ је 0. $\begin{vmatrix} m & 1 & -1 \\ 3 & m & 2 \\ 7 & 4 & 0 \end{vmatrix} = 0;\ -m + 2 = 0;\ m = 2$. Заменом добијамо координате вектора, $\vec{a} = (2,1,-1)$. Косинус угла који вектор $\vec{a}$ заклапа са y – осом је $\cos\alpha = \frac{\vec{a}\cdot\vec{j}}{|\vec{a}||\vec{j}|} = \frac{(2,1,-1)\cdot(0,1,0)}{\sqrt{6}} = \frac{1}{\sqrt{6}}$

Одговор Г) $\frac{1}{\sqrt{6}}$

7. У једнакостраничну купу запремине $24\pi cm^3$ уписана је лопта. Однос полупречника уписане лопте и основе купе је:

   А) $\frac{3}{2}$ Б) $\frac{1}{2}$ В) $\frac{\sqrt{6}}{3}$ Г) $\frac{2}{3}$ Д) $\frac{\sqrt{3}}{3}$

Решење: Важи $2r_k = s$. Из осног пресека купе (једнакостранични троугао) је $H^2 = 4{r_k}^2 - {r_k}^2, H = r_k\sqrt{3}$. Запремина купе $V = \frac{1}{3}{r_k}^2 H = \frac{\sqrt{3}}{3}{r_k}^3\pi$. На основу задатка је $\frac{\sqrt{3}}{3}{r_k}^3\pi = 24\pi$, ${r_k}^3 = 24\sqrt{3} = 8\cdot\sqrt{3^3}$, $r_k = 2\sqrt{3}$. Страница једнакостраничног троугла је $4\sqrt{3}$. Полупречник уписаног круга је полупречник уписане лопте. $r_L = \frac{4\sqrt{3}\sqrt{3}}{6} = 2$. $\frac{r_L}{r_k} = \frac{2}{2\sqrt{3}} = \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3}$. **Одговор** Д) $\frac{\sqrt{3}}{3}$

8. Центар круга је у жижи параболе $y^2 = 2px, p > 0$ и полупречник круга је $r = 2p$. Ако је тачка $M(x > 0, y > 0)$ пресечна тачка параболе и круга и ако је права $y = kx + n$ тангента круга у тачки M, онда је n једнако:

   А) $-\frac{3\sqrt{2}}{4}p$ Б) $\frac{3\sqrt{3}}{2}p$ В) $2p$ Г) $4p^2$ Д) $-4p^2$

Решење: Центар круга је $\left(\frac{p}{2}, 0\right)$, једначина круга $\left(x - \frac{p}{2}\right)^2 + y^2 = 4p^2$. Пресечна тачка M параболе и круга је решење система $y^2 = 2px$ и $\left(x - \frac{p}{2}\right)^2 + y^2 = 4p^2$, тачка $M\left(\frac{3p}{2}, p\sqrt{3}\right)$. Једначина тангенте круга у тачки M је $p\left(x - \frac{p}{2}\right) + p\sqrt{3}y = 4p^2, y = -\frac{\sqrt{3}}{3}x + \frac{3\sqrt{3}}{2}p, n = \frac{3\sqrt{3}}{2}p$.

Одговор Б) $\frac{3\sqrt{3}}{2}p$

9. Дужине ивица квадра, чија је дијагонала $D = 6cm$ и површина $P = 72cm^2$, образују геометријски низ. Запремина квадра (изражена у cm^3) је:

   А) $24\sqrt{3}$ Б) $12\sqrt{2}$ В) 27 Г) 64 Д) 216

Решење: Дужине ивица квадра $a = a_1, b = a_1q,\ c = a_1q^2$. Дијагонала је $D = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2}$, $36 = {a_1}^2 + {a_1}^2q^2 + {a_1}^2q^4$ (1). Површина је $P = 2(ab + ac + bc)$, $36 = {a_1}^2q + {a_1}^2q^2 + {a_1}^2q^3$ (2). Решавањем (1) и (2) добијамо $q = 1$. Закључујемо да је квадар коцка странице $a = 2\sqrt{3}$. Запремина је $V = a^3, V = 24\sqrt{3}cm^3$. **Одговор** А) $24\sqrt{3}$

10. Ако је полином $A(x) = x^4 - x^3 + ax^2 + bx + c; (a, b, c \in R)$ дељив без остатка полиномом $B(x) = x^3 - 2x^2 - 5x + 6$, онда вредност $a^2 - 3b^2 - c^2$ припада скупу:

   А) $[2,6)$ Б) $[6,8)$ В) $[8, 10)$ Г) $[10,12)$ Д) $[12,14)$

Решење: Ако је полином $A(x)$ дељив без остатка полиномом $B(x)$, онда су нуле полинома $B(x)$ и нуле полинома $A(x)$. Нуле полинома $B(x)$ су $x_1 = 1, x_2 = -2, x_3 = 3$. Важи да је $A(1) = a + b + c = 0$ (1); $A(-2) = 4a - 2b + c = -24$ (2); $A(3) = 9a + 3b + c = -54$ (3). Решавањем (1), (2), (3) добијамо $a = -7, b = 1, c = 6$; $a^2 - 3b^2 - c^2 = 10$. **Одговор** Г) $[10,12)$

Републичко такмичење талентованих ученика средњих школа

Кључ за решења задатака МАТЕМАТИКА за III разред средњих школа

22. мај 2022.

ЗАДАТАК	ОДГОВОР
1.	В
2.	Д
3.	Б
4.	В
5.	А
6.	Г
7.	Д
8.	Б
9.	А
10.	Г

Коришћена литература:

(1) С. Огњановић, Ж. Ивановић Математика 3 - Збирка задатака за III гимназија и техничких школа. „Круг“ БЕОГРАД, 2004.
(2) В. Стојановић, Н. Ћирић – 5 MATHEMATISKOP 5, ЗБИРКА РЕШЕНИХ ЗАДАТАКА за трећи разред средњих школа. МАТЕМАТИСКОП Београд, 1999.
(3) Mr V. T. Bogoslavov ZBIRKA REŠENIH ZADATAKA IZ MATEMATIKE 3, Zavod za udžbenike i nastavna sredstva Beograd, 2003.