Републичко такмичење талентованих ученика средњих школа

РЕШЕЊА теста из МАТЕМАТИКЕ за IV разред средњих школа 22. мај 2022.

1. Област вредности функције $y=\sqrt{-x^2+4x-3}$ је подскуп скупа:
А) $(-7,-4)$ Б) $(-4,-1)$ В) $(-1,2)$ Г) $(2,5)$ Д) (5.8)

Решење: Област дефинисаности функције $y=\sqrt{-x^2+4x-3}$ је $x\in[1,3]$. Максимална вредност функције на домену: $y'=\frac{-2x+4}{2\sqrt{-x^2+4x-3}}, y'=0, x=2$. За $x=2$, максимум је $y=1$. Функција $y=\sqrt{-x^2+4x-3}\geq 0$, значи $y\in[0,1]$. **Одговор** В) $(-1,2)$

2. Ако је вредност интеграла $\int_2^3 \frac{3t^2+2t-3}{t^3-t}dt=x$, онда је $\log_{\frac{3}{2}} e^x$ једнако:
А) $\log_{\frac{3}{2}} 5$ Б) 5 В) $\log_{\frac{3}{2}} 4$ Г) 4 Д) $\log_{\frac{3}{2}} \frac{5}{4}$

Решење: Подинтегралну функцију трансформишемо $\frac{3t^2+2t-3}{t^3-t}=\frac{A}{t}+\frac{B}{t-1}+\frac{C}{t+1}=\frac{A(t^2-1)+B(t^2+t)+C(t^2-t)}{t(t-1)(t+1)}=\frac{(A+B+C)t^2+(B-C)t-A}{t(t-1)(t+1)}$. Важи да је $A+B+C=3$, $B-C=2;\ -A=-3$. Решавањем система добијамо $A=3, B=1, C=-1$. Интеграл постаје $\int_2^3\frac{3t^2+2t-3}{t^3-t}dt=\int_2^3\frac{3dt}{t}+\int_2^3\frac{dt}{t-1}-\int_2^3\frac{dt}{t+1}=(3\ln|t|+\ln|t-1|-\ln|t+1|)$ у границама од 2 до 3, односно $(3\ln 3+\ln 2-\ln 4)-(3\ln 2+\ln 1-\ln 3)=4\ln 3-2\ln 2-\ln 4=\ln\frac{81}{16}, x=\ln\frac{81}{16}$.
Израчунавамо $\log_{\frac{3}{2}} e^x=\log_{\frac{3}{2}} e^{\ln\frac{81}{16}}=\log_{\frac{3}{2}}\left(\frac{3}{2}\right)^4=4$. **Одговор** Г) 4

3. Ако кроз тачку $M\left(\frac{1}{3},\frac{4}{3}\right)$ поставимо праву $y=kx+n$ тако да збир одсечака које она одређује на позитивним деловима координатних оса буде најмањи, онда је $k-n$ једнако:
А) -4 Б) -2 В) 0 Г) 2 Д) 4

Решење: Једначина праве кроз тачку $M\left(\frac{1}{3},\frac{4}{3}\right)$ је $y-\frac{4}{3}=k\left(x-\frac{1}{3}\right)$. Њен сегментни облик је $\frac{x}{\frac{k-4}{3k}}+\frac{y}{\frac{4-k}{3}}=1$. Сегменти на x и y оси су $a=\frac{k-4}{3k}$, $b=\frac{4-k}{3}, g(k)=a+b=\frac{k-4+4k-k^2}{3k}=\frac{-k^2+5k-4}{3k}$ и $g'(k)=\frac{-3k^2+12}{9k^2}, g'(k)=0, k=\pm 2$. За $k=-2$ функција $g(k)$ достиже минимум (права одсеца одсечке на позитивним деловима оса). Заменом добијамо $a=1, b=2$. Једначина праве је $y=-2x+2$, $k=-2$, $n=2$, $k-n=-4$. **Одговор** А) -4

4. Трећи члан у развоју бинома $\left(2x+\frac{1}{x^2}\right)^n, x\neq 0, n\in N$ не садржи x. Одредити производ свих вредности x за које је тај члан једнак другом члану у развоју бинома $(1+x^3)^{30}$.
А) -2 Б) 2 В) 4 Г) 6 Д) 8

Решење: Трећи члан је $T_3=\binom{n}{2}(2x)^{n-2}x^{-4}=\binom{n}{2}2^{n-2}x^{n-6}$. Одређујемо члан који не садржи x, $n-6=0, n=6$. Члан који не садржи x је $T_3=15\cdot 16=240$. Други члан у развијеном облику бинома $(1+x^3)^{30}$ је $T_2=30\cdot x^3$. Изједначавањем чланова добијамо $30\cdot x^3=240$, $x^3=8, x^3-8=0; (x-2)(x^2+2x+4)=0, x_1=2, x_2=-1-i\sqrt{3}, x_3=-1+i\sqrt{3}$. Производ свих вредности је 8. **Одговор** Д) 8

5. Вредност граничне вредности $\lim_{x\to -8}\frac{\sqrt{1-x}-3}{2+\sqrt[3]{x}}$ припада скупу:
А) $(-\infty,-3)$ Б) $(-3,-1)$ В) $(-1,3)$ Г) $(3,7)$ Д) $(7,+\infty)$

Решење: Применом Лопиталовог правила $\lim_{x\to -8}\frac{\sqrt{1-x}-3}{2+\sqrt[3]{x}}=\lim_{x\to -8}\frac{\frac{-1}{2\sqrt{1-x}}}{\frac{1}{3}x^{-\frac{2}{3}}}=\frac{-\frac{1}{6}}{\frac{1}{12}}=-2$. **Одговор** Б) $(-3,-1)$

6. Површина површи ограничене y - осом, кривом $y=x^2-7x+3$ и тангентом криве која је паралална правој $5x+y+2=0$ припада скупу:
А) $\left\{\frac{1}{6},\frac{2}{7},\frac{3}{5}\right\}$ Б) $\left\{\frac{1}{2},\frac{1}{4},\frac{2}{5}\right\}$ В) $\left\{\frac{1}{3},2,\frac{3}{2}\right\}$ Г) $\left\{0,\frac{3}{4},\frac{7}{6}\right\}$ Д) $\left\{1,\frac{12}{7},\frac{14}{5}\right\}$

Решење: Тангента криве има исти коефицијент правца као и дата права, $y=-5x-2, k=-5$. Први извод $y'=2x-7$, значи $2x-7=-5, x=1, y=-3$, тачка $M(1,-3)$ је тачка додира тангенте и криве. Једначина тангенте је, $y+3=-5(x-1), y=-5x+2$. Израчунавамо површину површи ограничену y – осом, кривом $y=x^2-7x+3$ и тангентом $y=-5x+2$. $P=\int_0^1(x^2-7x+3-(-5x+2))dx=\int_0^1(x^2-2x+1)dx=\frac{1}{3}$. **Одговор** В) $\left\{\frac{1}{3},2,\frac{3}{2}\right\}$

7. Функција $f(x)=2\int_0^x\frac{z-1}{z^2-2z+3}dz$ је негативна за свако x из интервала:
А) $(-\infty,-5)$ Б) $(-5,-2)$ В) $(-2,0)$ Г) $(0,2)$ Д) $(2,+\infty)$

Решење: Решавамо интеграл $2\int_0^x\frac{z-1}{z^2-2z+3}dz$ методома замене: $z^2-2z+3=t, (z-1)dz=\frac{dt}{2}$ $\int_a^b\frac{dt}{t}=\ln|t|=\ln|z^2-2z+3|=\ln(z^2-2z+3), (z^2-2z+3>0)$ у границама од 0 до x. $\ln(z^2-2z+3)=\ln(x^2-2x+3)-\ln3=\ln\frac{x^2-2x+3}{3}$, значи $f(x)=\ln\frac{x^2-2x+3}{3}$. По услову задатка је $f(x)<0$; $0<\frac{x^2-2x+3}{3}<1$; $\frac{x^2-2x+3}{3}>0, ; \forall x\in R \wedge \frac{x^2-2x+3}{3}<1, x^2-2x<0, x\in(0,2), f(x)<0, \forall x\in(0,2)$. **Одговор** Г) $(0,2)$

8. Дата је функција $f(x)=(m+1)x^2+(m+3)x-5, m\in R$. Збир свих вредност параметра m за које важи да су изрази $f(1)+15, f'(1), f''(x)$ узастопни чланови геометријске прогресије је:
А) 0,4 Б) 0,6 В) 0,8 Г) 1 Д) 1,2

Решење: Одређујемо изразе: $f(1)+15=2m+14$, $f'(1)=2m+2+m+3=3m+5$, $f''(x)=2m+2$. По услову задатка то су узастопни чланови геометријске прогресије па важи $\frac{3m+5}{2m+14}=\frac{2m+2}{3m+5}$; $(3m+5)^2=(2m+14)(2m+2)$, $5m^2-2m-3=0, m_1=-0{,}6, m_2=1$, $m_1+m_2=0{,}4$. **Одговор** А) 0,4

9. Ако је тачка $P\left(2,\frac{5}{2}\right)$ превојна тачка графика фунције $x^2y+px+qy=0, p\neq0, q\neq0$, онда збир $p+q$ припада скупу
А) $(-\infty,-7)$ Б) $(-7,-5)$ В) $(-5,-3)$ Г) $(-3,-1)$ Д) $(-1,1)$

Решење: Из функције $x^2y+px+qy=0$ изразимо $y=\frac{-px}{x^2+q}$ и одредимо y''. $y'=\frac{px^2-pq}{(x^2+q)^2}$, $y''=\frac{-2px^3+6pqx}{(x^2+q)^3}$, $y''=0, 2px(-x^2+3q)=0$, $x^2=3q$, $4=3q$, $q=\frac{4}{3}$. Заменом израчунавамо $\frac{5}{2}=\frac{-2p}{4+\frac{4}{3}}, -4p=\frac{80}{3}, p=-\frac{20}{3}, p+q=-\frac{16}{3}$. **Одговор** Б) $(-7,-5)$

10. Ако се број комбинација треће класе од m елемената са понављањем односи према броју комбинација треће класе од истог броја елемената без понављања као $15:7$, онда је m^2-3m једнако:
А) 4 Б) 10 В) 18 Г) 28 Д) 40

Решење: Број комбинација треће класе од m елемената са понављањем је $\bar{C}_3^m=\binom{m+2}{3}$, број комбинација треће класе од m елемената без понављања је $C_3^m=\binom{m}{3}$. Из услова задатка је $\binom{m+2}{3}:\binom{m}{3}=15:7, 7\cdot\frac{(m+2)(m+1)m}{3!}=15\cdot\frac{m(m-1)(m-2)}{3!}; 4m^2-33m+8=0, m_1=8, m_2\notin N$. $m^2-3m=40$. **Одговор** Д) 40

Републичко такмичење талентованих ученика средњих школа

Кључ за решења задатака МАТЕМАТИКА за IV разред средњих школа

22. мај 2022.

ЗАДАТАК	ОДГОВОР
1.	В
2.	Г
3.	А
4.	Д
5.	Б
6.	В
7.	Г
8.	А
9.	Б
10.	Д

Коришћена литература:

(1) С. Огњановић, Ж. Ивановић Математика 4 - Збирка задатака за IV разред гимназија и техничких школа, осмо прерађено издање „Круг“ БЕОГРАД
(2) С. Вукадиновић, В. Стојановић,– 6 MATHEMATISKOP 6, ЗБИРКА РЕШЕНИХ ЗАДАТАКА за четврти разред средњих школа. МАТЕМАТИСКОП Београд, 1999.
(3) Mr V. T. Bogoslavov ZBIRKA REŠENIH ZADATAKA IZ MATEMATIKE 4, Zavod za udžbenike i nastavna sredstva Beograd, 1999.