МИНИСТАРСТВО ПРОСВЕТЕ, НАУКЕ И ТЕХНОЛОШКОГ РАЗВОЈА РЕПУБЛИКЕ СРБИЈЕ

РЕГИОНАЛНИ ЦЕНТАРИ ЗА ТАЛЕНТЕ РЕПУБЛИКЕ СРБИЈЕ

64. РЕПУБЛИЧКО ТАКМИЧЕЊЕ ТАЛЕНТОВАНИХ УЧЕНИКА СРЕДЊИХ ШКОЛА, ПО НАСТАВНИМ ПРЕДМЕТИМА, РЕПУБЛИКЕ СРБИЈЕ, 22. МАЈ 2022.

1. Ако је $x \geq 0$ и $y \geq 0$ и $x \neq y$ за $x, y \epsilon R$ тада је израз

$$\left(\frac{x\sqrt{x}-y\sqrt{y}}{\sqrt{x}-\sqrt{y}}+\sqrt{xy}\right)\cdot\left(\frac{\sqrt{x}-\sqrt{y}}{x-y}\right)^2$$ једнак:

А) $\sqrt{x}-\sqrt{y}$	Б) -1	В) 1	Г) $x-y$

$$\left(\frac{x\sqrt{x}-y\sqrt{y}}{\sqrt{x}-\sqrt{y}}+\sqrt{xy}\right)\cdot\left(\frac{\sqrt{x}-\sqrt{y}}{x-y}\right)^2=\left(\frac{\sqrt{x^3}-\sqrt{y^3}}{\sqrt{x}-\sqrt{y}}+\sqrt{xy}\right)\cdot\left(\frac{\sqrt{x}-\sqrt{y}}{\sqrt{x^2}-\sqrt{y^2}}\right)^2=$$

$$\left(\frac{(\sqrt{x}-\sqrt{y})\cdot(x+\sqrt{xy}+y)}{\sqrt{x}-\sqrt{y}}+\sqrt{xy}\right)\cdot\left(\frac{\sqrt{x}-\sqrt{y}}{(\sqrt{x}-\sqrt{y})\cdot(\sqrt{x}+\sqrt{y})}\right)^2=\left(x+\sqrt{xy}+y+\sqrt{xy}\right)\cdot\left(\frac{1}{\sqrt{x}+\sqrt{y}}\right)^2=$$

$$=\left(\sqrt{x}+\sqrt{y}\right)^2\cdot\frac{1}{(\sqrt{x}+\sqrt{y})^2}=1$$

2. Збир свих целобројних решења једначине $\sqrt{x+3-4\sqrt{x-1}}+\sqrt{x+8-6\sqrt{x-1}}=1$ је:

А) 45	Б) 30	В) 35	Г) 40

Скуп допустивих вредности $x+3-4\sqrt{x-1}\geq 0$ и $x+8-6\sqrt{x-1}\geq 0$ и $x-1\geq 0 \Leftrightarrow x\geq 1$

$$\sqrt{x+3-4\sqrt{x-1}}+\sqrt{x+8-6\sqrt{x-1}}=1$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{x-1-4\sqrt{x-1}+4}+\sqrt{x-1-6\sqrt{x-1}+9}=1$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{\left(\sqrt{x-1}-2\right)^2}+\sqrt{\left(\sqrt{x-1}-3\right)^2}=1 \Leftrightarrow \left|\sqrt{x-1}-2\right|+\left|\sqrt{x-1}-3\right|=1$$

Уводимо смену $\sqrt{x-1}=t$ и $t\geq 0$, тако да се добија једначина $|t-2|+|t-3|=1$

Решења ове једначине су: $\begin{cases}-t+2-t+3=1, \text{за } t\in(-\infty,2) \\ t-2-t+3=1, \text{ за } t\in[2,3) \\ t-2+t-3=1, \text{за } t\in[3,+\infty)\end{cases} \Leftrightarrow \begin{matrix} t=2, \text{за } 0<t<2 \\ 1=1, \text{ за } t\in[2,3) \\ t=3, \text{за } t\in[3,+\infty)\end{matrix}$

$\Leftrightarrow t\in[2,3]$

Решење почетне једначине добија се враћањем смене :

$2\leq\sqrt{x-1}\leq 3 \Leftrightarrow 4\leq x-1\leq 9 \Leftrightarrow 5\leq x\leq 10$

Целобројна решења су : $x\in\{5,6,7,8,9,10\}$ и њихов збир износи $5+6+7+8+9+10=45$

3. Збир свих реалних вредности параметра k , тако да систем $\begin{cases} x^2+y^2+2x+2y-2=0 \\ kx-y-3=0 \end{cases}$ има јединствено решење је:

А) $\frac{4}{5}$	Б) $\frac{2}{3}$	В) 0	Г) $\frac{4}{3}$

Ако из друге једначине изразимо $y=kx-3$ и то заменимо у прву једначину, након сређивања добија се квадратна једначина:

$(1+k^2)\cdot x^2+(2-4k)\cdot x+1=0$

Да би систем имао јединствено решење , добијена квадратна једначина мора имати јединствено решење, а то се добија само ако је дискриминанта једнака 0.

$D=(2-4k)^2-4\cdot(1+k^2)=0 \Leftrightarrow 12k^2-16k=0 \Leftrightarrow 4k\cdot(3k-4)=0$

$\Leftrightarrow k_1=0$ или $k_2=\frac{4}{3}$

Збир свих реалних вредности параметра k је: $k_1+k_2=\frac{4}{3}$

4. Ако је $k\in R$, $i^2=-1$, тада је модул комплексног броја $z=\left(\frac{1+i}{1-i}\right)^{2022}+\frac{-1+5ki}{3i}-1$ најмањи за k једнако:

А) $\frac{5}{6}$	Б) $\frac{6}{5}$	В) $\frac{1}{3}$	Г) 0

$z=\left(\frac{1+i}{1-i}\right)^{2022}+\frac{-1+5ki}{3i}-1=z=\left(\frac{(1+i)\cdot(1+i)}{1-i^2}\right)^{2022}+\frac{(-1+5ki)\cdot i}{3i^2}-1=i^{2022}+\frac{-i+5ki^2}{-3}-1=$

$=(i^2)^{1011}+\frac{5k+i}{3}-1=-1+\frac{5k+i}{3}-1=\left(\frac{5k}{3}-2\right)+\frac{i}{3}$

Модул комплексногброја је : $|z|=\sqrt{\left(\frac{5k}{3}-2\right)^2+\left(\frac{1}{3}\right)^2}$

Он достиже минималну вредност $\min|z|=\frac{1}{3}$ за $\frac{5k}{3}-2=0$, одакле следи $k=\frac{6}{5}$

5. Дата је функција $f(x)=x^2+(k+2)x+2k$, $(k\in R)$. Ако једначина $f(x-k)-2x=0$ има решења 0 и 7, тада минимум функције $g(x)=f(x-k)-2x$ износи:

А) $-\frac{7}{2}$	Б) $-\frac{9}{4}$	В) $-\frac{49}{4}$	Г) $\frac{7}{2}$

$f(x-k)-2x=0 \Leftrightarrow (x-k)^2+(k+2)(x-k)+2k-2x=0$

$\Leftrightarrow x^2-2kx+k^2+kx-k^2+2x-2k+2k-2x=0 \Leftrightarrow x^2-kx=0 \Leftrightarrow x(x-k)=0$

$\Leftrightarrow x_1=0$ или $x_2=k$. Према услову задатка једначина $f(x-k)-2x=0$ има решења 0 и 7 одакле следи $k=7$.

Заменом добијеног $k=7$ у функцију $g(x)=f(x-k)-2x$ следи $g(x)=x^2-7x$

Ово је квадратна функција чији минимум износи $\frac{4ac-b^2}{4a}=-\frac{49}{4}$

6.	Сума (збир) дужина интервала којима може припадати x за које је испуњено $x^2 - x - \frac{36}{x^2-x} \leq 0$ је:			
	А) 2	Б) 4	В) 2	Г) 0

$x^2 - x - \frac{36}{x^2-x} \leq 0 \iff \frac{(x^2-x)^2-36}{x^2-x} \leq 0 \iff \frac{(x^2-x-6)\cdot(x^2-x+6)}{x^2-x} \leq 0$ и за квадратни трином $x^2 - x + 6$ важи да је позитиван за све реалне вредости x и $x^2 - x - 6 = (x-3)\cdot(x+2)$, тако да се неједначина своди на $\frac{(x-3)\cdot(x+2)}{x\cdot(x-1)} \leq 0 \iff x\epsilon[-2,0) \cup (1,3]$

Сума дужина интервала $I_1 + I_2 = 2 + 2 = 4$

7.	Збир реалних вредности параметра p таквих да су два решења једначине $-x^4 - 2px + x + p^2 - p = 0$ реална и иста , износи:			
	А) 1	Б) -1	В) -2	Г) 2

Решавамо дату једначину по променљивој p: $p^2 + (-2x-1)p - x^4 + x = 0$

$\iff p_{1,2} = \frac{1+2x\pm\sqrt{1+4x^2+4x^4}}{2} = \frac{1+2x\pm(1+2x^2)}{2} \iff p_1 = x^2 + x + 1$ или $p_2 = x - x^2$

$\iff x^2 + x + 1 - p = 0$ или $x^2 - x + p = 0$

Решавањем једначина по променљивој x следи : $x_{1,2} = \frac{-1\pm\sqrt{4p-3}}{2}$ или $x_{3,4} = \frac{1\pm\sqrt{1-4p}}{2}$

За $4p - 3 = 0$, то јест за $p = \frac{3}{4}$ следи $x_{1,2} = -\frac{1}{2}$; $x_{3,4} = \frac{1\pm\sqrt{-2}}{2}$

За $1 - 4p = 0$, то јест за $p = \frac{1}{4}$ следи $x_{1,2} = \frac{-1\pm\sqrt{-2}}{2}$; $x_{3,4} = \frac{1}{2}$

У оба случаја два решења су реална и иста ,тј за $p_1 = \frac{3}{4}$ и за $p_2 = \frac{1}{4}$, па је њихов збир:

$p_1 + p_2 = \frac{3}{4} + \frac{1}{4} = 1$

8.	Ако једначина $(\sqrt{x})^{log_3x-1} = 3$ има тачно m целобројних решења и тачно n ирационалних решења , онда је:			
	А) $m = 0 , n = 1$	Б) $m = n = 1$	В) $m = 2 , n = 0$	Г) $m = 1 , n = 0$

Скуп допустивих вредности дате једначине је $x > 0$

$(\sqrt{x})^{log_3x-1} = 3 \iff log_3(\sqrt{x})^{log_3x-1} = log_33 \iff (log_3x - 1)\cdot log_3x^{\frac{1}{2}} = 1$

$\iff (log_3x)^2 - log_3x - 2 = 0 \iff (log_3x)_{1,2} = \frac{1\pm3}{2} \iff log_3x = -1$ или $log_3x = 2$

$\iff x = 3^{-1}$ или $x = 3^2 \iff x = \frac{1}{3}$ или $x = 9 \in Z$

m целобројних решења , следи m =1 и тачно n ирационалних решења $n = 0$

9.	Вредност израза $\frac{1}{sin10°} - 4sin70°$ износи:			
	А) 1	Б) -2	В) 2	Г) $\sqrt{2}$

$$\frac{1}{sin10°} - 4sin70° = \frac{2cos10°}{2cos10° sin10°} - 4sin70° = \frac{2cos10°}{sin20°} - 4cos20° =$$

$$= \frac{2cos10° - 4cos20° sin20°}{sin20°} = \frac{2cos10° - 2sin40°}{sin20°} = \frac{2(cos10° - cos50°)}{sin20°} = \frac{2\left(-2sin\frac{10°+50°}{2} \cdot sin\frac{10°-50°}{2}\right)}{sin20°} =$$

$$= \frac{-4sin30° \cdot \sin(-20°)}{sin20°} = \frac{4 \cdot \frac{1}{2} \cdot \sin 20°}{sin20°} = 2$$

10.	Збир свих реалних решења једначине $4^{sin^2 2x} - 2^{cos4x} = 1$ на интервалу $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ је:			
	А) $\frac{\pi}{2}$	Б) $\frac{\pi}{3}$	В) $\frac{3\pi}{2}$	Г) $\frac{\pi}{4}$

$$4^{sin^2 2x} - 2^{cos4x} = 1 \Leftrightarrow 2^{2sin^2 2x} - 2^{1-2sin^2 2x} = 1$$

$$\Leftrightarrow 2^{2sin^2 2x} - 2 \cdot 2^{-2sin^2 2x} - 1 = 0$$

Након увођења смене $2^{sin^2 2x} = t$ добија се биквадратна једначина :

$t^4 - t^2 - 2 = 0 \Leftrightarrow (t^2)_{1,2} = \frac{1 \pm 3}{2} \Leftrightarrow t^2 = 2$ или $t^2 = -1 \Leftrightarrow t_{1,2} = \pm\sqrt{2}$ или $t \in \emptyset$

Враћањем добијених вредности у смену , добија се:

$2^{sin^2 2x} = -\sqrt{2}$ или $2^{sin^2 2x} = \sqrt{2} \Leftrightarrow x \in \emptyset$ или $sin^2 2x = \frac{1}{2} \Leftrightarrow sin2x = \pm\frac{\sqrt{2}}{2}$

$$\Leftrightarrow 2x = \frac{\pi}{4} + \frac{k\pi}{2} (k \in Z) \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{8} + \frac{k\pi}{4} \ (k \in Z)$$

на интервалу $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ решења су :$x_1 = \frac{\pi}{8}$ $x_2 = \frac{3\pi}{8}$

Збир свих реалних решења је: $x_1 + x_2 = \frac{\pi}{8} + \frac{3\pi}{8} = \frac{\pi}{2}$

Кључ за решење задатака – II   разред републичко 22. мај 2022.

Задатак	Решење
1.	В
2.	А
3.	Г
4.	Б
5.	В
6.	Б
7.	А
8.	Г
9.	В
10.	А