Републичка такмичарска смотра радова научног и уметничког стваралаштва талената РЕШЕЊА теста из МАТЕМАТИКЕ за I разред средње школе 22. мај 2022. године

1.	Ако је $\frac{\boldsymbol{x}}{\boldsymbol{a}}=\frac{\boldsymbol{y}}{\boldsymbol{b}}=\frac{\boldsymbol{z}}{\boldsymbol{c}}$ $(a \neq 0, b \neq 0, c \neq 0)$ и $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c}=\mathbf{1}$ и $\boldsymbol{a}^{\mathbf{2}}+\boldsymbol{b}^{\mathbf{2}}+\boldsymbol{c}^{\mathbf{2}}=\mathbf{1}$, онда је $\boldsymbol{x} \cdot \boldsymbol{y}+\boldsymbol{x} \cdot \boldsymbol{z}+\boldsymbol{y} \cdot \boldsymbol{z}$ једнако:			
	А) 0	Б) 2	В) 3	Г)-1

Ако је $\frac{\boldsymbol{x}}{\boldsymbol{a}}=\frac{\boldsymbol{y}}{\boldsymbol{b}}=\frac{\boldsymbol{z}}{\boldsymbol{c}}=\frac{1}{t}$ $(t \neq 0)$, следи да је $a=x \cdot t, b=y \cdot t, c=z \cdot t$
Из услова $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c}=\mathbf{1}$, након квадрирања ове једнакости следи:
$\boldsymbol{a}^{\mathbf{2}}+\boldsymbol{b}^{\mathbf{2}}+\boldsymbol{c}^{\mathbf{2}}+2(a \cdot b+a \cdot c+b \cdot c)=1$ и $\boldsymbol{a}^{\mathbf{2}}+\boldsymbol{b}^{\mathbf{2}}+\boldsymbol{c}^{\mathbf{2}}=\mathbf{1}$ **,** тако да се добија:
$1+2(a \cdot b+a \cdot c+b \cdot c)=1$, тј $a \cdot b+a \cdot c+b \cdot c=0$
Ако у једнакост $a \cdot b+a \cdot c+b \cdot c=0$ заменимо $a=x \cdot t, b=y \cdot t, c=z \cdot t$, добија се:
$x \cdot y \cdot t^2+x \cdot z \cdot t^2+y \cdot z \cdot t^2=0$ и $t \neq 0$ следи $\boldsymbol{x} \cdot \boldsymbol{y}+\boldsymbol{x} \cdot \boldsymbol{z}+\boldsymbol{y} \cdot \boldsymbol{z}$ =0

2.	Ако полином P(x)= $x^4+a x^2+b x+2,(a, b \epsilon R)$ при дељењу са полиномом $Q(x)=x^2-x-2$, даје остатак $R(x)=2 x$, тада је вредност израза $a \cdot b$ једнака:			
	А) -1	Б) 2	В) -4	Г) 0

Нуле полинома $Q(x)$ су 2 и -1 , одакле следи да је полином
$Q(x)=x^2-x-2$ =$(x-2) \cdot(x+1)$
Полином P(x) можемо приказати у облику:
P(x)= $x^4+a x^2+b x+2$ = $(x-2) \cdot(x+1) \cdot q(x)+2 x$, где је $q(x)$ количник.
P(2)= $16+4 a+2 b+2$ = 4
P(-1)= $1+a-b+2$ = -2
Решавањем овог система добија се $a=-4, b=1$
Тада је вредност израза $a \cdot b=-4$

3.	У следећој једнакости $(2 \cdot \overline{a b 1})^2=\overline{49280 c}$ уместо a, b, c ставити одговарајуће цифре тако да једнакост буде тачна. Тада је $a+b+c$ једнако :			
	А) 19	Б) 17	В) 13	Г) 12

Лева страна једнакости је дељива са 2^2 , па мора бити и десна страна дељива са 4. Број је дељив са 4 ако је двоцифрени завршетак дељив са 4, дакле $\overline{0 c}$ мора бити дељиво са 4.То је могуће ако је $c=0$ или $c=4$ или $c=8$.
За $c=0$ десна страна је број 492800 који није потпун квадрат.
За $c=8$ десна страна је број 492808 који није потпун квадрат.
За $c=4$ десна страна је број 492804 који је потпун квадрат, тј 492804= 702^2 .
Дакле $2 \cdot \overline{a b 1}$ = 702 , одакле следи $\overline{a b 1}=351$, односно $a=3$, $b=5$
Збир $a+b+c$ = $3+5+4=12$

4.	Ако је $y=\frac{x^2+\frac{1}{x^2}}{x^2-\frac{1}{x^2}}$ и $z=\frac{x^4+\frac{1}{x^4}}{x^4-\frac{1}{x^4}}$ тада је $z(y)$ (z у функцији од y) једнако:			
	А) $\frac{y^2+1}{2y}$	Б) $\frac{y^2-1}{4y}$	В) $\frac{2y^2-1}{2y}$	Г) $\frac{1-y^2}{4y}$

Скуп допустивих вредности за $x\epsilon R\backslash\{-1,0,1\}$.

Из једнакости $y=\frac{x^2+\frac{1}{x^2}}{x^2-\frac{1}{x^2}} \Leftrightarrow y\cdot\left(x^2-\frac{1}{x^2}\right)=x^2+\frac{1}{x^2} \Leftrightarrow y\cdot(x^4-1)=x^4+1$

$\Leftrightarrow x^4\cdot(y-1)=y+1$ следи $x^4=\frac{y+1}{y-1}$

Након замене $x^4=\frac{y+1}{y-1}$ у $z=\frac{x^4+\frac{1}{x^4}}{x^4-\frac{1}{x^4}}$ следи $z=\frac{\frac{y+1}{y-1}+\frac{y-1}{y+1}}{\frac{y+1}{y-1}-\frac{y-1}{y+1}}=\frac{y^2+1}{2y}$ $(y\neq\pm1)$

5.	Решење једначине $\frac{x-2016}{6}+\frac{x-2017}{5}+\frac{x-2018}{4}+\frac{x-2019}{3}+\frac{x-2020}{2}+\frac{x-2021}{1}=\frac{x-6}{2016}+\frac{x-5}{2017}+\frac{x-4}{2018}+\frac{x-3}{2019}+\frac{x-2}{2020}+\frac{x-1}{2021}$ припада интервалу :			
	А) (2019,2022)	Б) (2015,2018)	В) (2018,2022)	Г) (2020,2023)

једначине $\frac{x-2016}{6}-1+\frac{x-2017}{5}-1+\frac{x-2018}{4}-1+\frac{x-2019}{3}-1+\frac{x-2020}{2}-1+\frac{x-2021}{1}-1=\frac{x-6}{2016}-1+\frac{x-5}{2017}-1+\frac{x-4}{2018}-1+\frac{x-3}{2019}-1+\frac{x-2}{2020}-1+\frac{x-1}{2021}-1$

$\Leftrightarrow \frac{x-2022}{6}+\frac{x-2022}{5}+\frac{x-2022}{4}+\frac{x-2022}{3}+\frac{x-2022}{2}+\frac{x-2022}{1}=\frac{x-2022}{2016}+\frac{x-2022}{2017}+\frac{x-2022}{2018}+\frac{x-2022}{2019}+\frac{x-2022}{2020}+\frac{x-2022}{2021}$

$\Leftrightarrow(x-2022)\cdot\left(\frac{1}{6}+\frac{1}{5}+\frac{1}{4}+\frac{1}{3}+\frac{1}{2}+1\right)=(x-2022)\cdot\left(\frac{1}{2016}+\frac{1}{2017}+\frac{1}{2018}+\frac{1}{2019}+\frac{1}{2020}+\frac{1}{2021}\right)$

$\Leftrightarrow(x-2022)\cdot\left(\frac{1}{2016}+\frac{1}{2017}+\frac{1}{2018}+\frac{1}{2019}+\frac{1}{2020}+\frac{1}{2021}-\frac{1}{6}-\frac{1}{5}-\frac{1}{4}-\frac{1}{3}-\frac{1}{2}-1\right)=0$

$\Leftrightarrow x-2022=0 \Leftrightarrow x=2022\epsilon(2020,2023)$

6.	За дати систем једначина $\begin{cases} x+py=3 \\ px+4y=6 \end{cases}$ у случају када постоји јединствено решење, све вредности параметра p тако да важи $\lvert x-y\rvert>1$ су:			
	А) $(-5,-2)\cup(-2,1)$	Б) $\emptyset$	В) $(-5,-2)$	Г) $(-5,1)$

Решавањем система добија се $\begin{cases} x=\frac{6\cdot(2-p)}{(2-p)\cdot(2+p)} \\ y=\frac{3\cdot(2-p)}{(2-p)\cdot(2+p)} \end{cases}$ За $p\neq\pm2$ систем има јединствено решење: $(x,y)=\left(\frac{6}{2+p},\frac{3}{2+p}\right)$.

Заменом добијених вредности у $\lvert x-y\rvert>1$, добија се:

$\left|\frac{6}{2+p}-\frac{3}{2+p}\right|>1 \Leftrightarrow \left|\frac{3}{2+p}\right|>1$

За $p>-2$ добија се неједначина $\frac{3}{2+p}>1$ чије је решење $p\epsilon(-2,1)$

За $p<-2$ добија се неједначина $-\frac{3}{2+p}>1$ чије је решење $p\epsilon(-5,-2)$

Унија добијених скупова решења је $p\epsilon(-5,-2)\cup(-2,1)$.

7.	Природних бројева који су решење неједначине $\frac{\sqrt{x^2-2x+1}}{x^2-x} > \frac{1}{5}$ има:			
	А) 0	Б) 4	В) 2	Г) 5

Дата неједначина је дефинисана за све реалне вредности x које су различите од 0 и 1.

$\frac{\sqrt{x^2-2x+1}}{x^2-x} > \frac{1}{5} \Leftrightarrow \frac{\sqrt{(x-1)^2}}{x(x-1)} > \frac{1}{5} \Leftrightarrow \frac{|x-1|}{x(x-1)} > \frac{1}{5}$

(1) за $x < 1$, неједначина $\frac{-(x-1)}{x(x-1)} > \frac{1}{5} \Leftrightarrow \frac{-1}{x} > \frac{1}{5} \Leftrightarrow \frac{5+x}{5x} < 0 \Leftrightarrow x\epsilon(-5,0)$

(2) за $x \geq 1$, неједначина $\frac{x-1}{x(x-1)} > \frac{1}{5} \Leftrightarrow \frac{1}{x} > \frac{1}{5} \Leftrightarrow \frac{5-x}{5x} > 0 \Leftrightarrow x\epsilon(0,5)$

Решење неједначине у скупу реалних бројева је $x\epsilon(-5,0) \cup (0,5)$

Решење неједначине у скупу природних бројева је $x\epsilon \{1,2,3,4\}$.

Дакле неједначина има 4 решења у скупу N.

8.	Пет радника обављају један посао. Први, други и трећи радећи заједно завршили би читав посао за $7^h30'$ Први, трећи и пети за 5^h. Први , трећи и четврти за 6^h. Други, четврти и пети за 4^h. За које време би цео посао завршило свих пет радника радећи заједно ?			
	А) за 5^h	Б) за $2^h30'$	В) за 3^h	Г) за 1^h

Нека су редом x, y, z, u, t времена за које би први, други, трећи, четврти и пети радник завршили посао.

Део посла који би редом сваки од тих пет радника обавили за 1^h су $\frac{1}{x}, \frac{1}{y}, \frac{1}{z}, \frac{1}{u}, \frac{1}{t}$

Из првог, другог, трећег и четвртог услова задатка добијамо редом једначине:

$\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} = \frac{1}{7,5}$

$\frac{1}{x} + \frac{1}{z} + \frac{1}{t} = \frac{1}{5}$

$\frac{1}{x} + \frac{1}{z} + \frac{1}{u} = \frac{1}{6}$

$\frac{1}{y} + \frac{1}{u} + \frac{1}{t} = \frac{1}{4}$

Ако саберемо све четири једначине добија се:

$\frac{3}{x} + \frac{3}{y} + \frac{1}{z} + \frac{1}{u} + \frac{1}{t} = \frac{1}{2}$

Ако помножимо четврту једначину са 2 и додамо је претходној једнакости :

$\frac{3}{x} + \frac{3}{y} + \frac{3}{z} + \frac{3}{u} + \frac{3}{t} = 1 \Leftrightarrow \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} + \frac{1}{u} + \frac{1}{t} = \frac{1}{3}$

Свих пет радника радећи заједно, завршили би трећину посла за 1^h .

Дакле цео посао би завршили за 3^h.

9. Дате су линеарне функције $y=-\frac{3}{2}mx+3m$ и $y=-\frac{5}{4}mx+5$, где је m решење једначине $\frac{m+1}{5}+\frac{2m-3}{15}+1=m-\frac{m-2}{6}$. Површина фигуре ограничене графицима датих функција и координатним осама у првом квадранту координатног система износи:

А) $\frac{7}{2}$	Б) 5	В) 2	Г) $\frac{7}{4}$

Решење једначине $\frac{m+1}{5}+\frac{2m-3}{15}+1=m-\frac{m-2}{6}$ је $m=\frac{4}{3}$.

Заменом добијене вредности у дате линеарне функције добијамо :

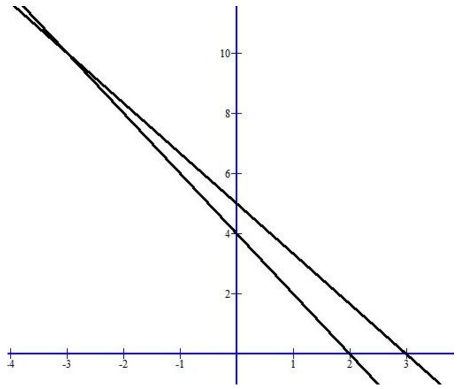
$y=-2x+4$ и $y=-\frac{5}{3}x+5$.

Пресечна тачка правих је $(-3,10)$

Површина фигуре ограничене графицима датих функција и координатним осама у првом квадранту координатног система израчунава се као разлика површине троугла одређеног тачкама : $(-3,10),(2,0),(3,0)$ и површине троугла одређеног тачкама: $(-3,10),(0,4),(0,5)$

$P_F=\frac{1\cdot 10}{2}-\frac{1\cdot 3}{2}$

$P_F=\frac{7}{2}$



10. Основица троугла је једнака a. Дужина дужи која је паралелна основици a троугла и дели троугао на два дела једнаких површина износи:

А) $\frac{a\sqrt{3}}{3}$	Б) $\frac{a}{3}$	В) $\frac{a\sqrt{2}}{3}$	Г) $\frac{a\sqrt{2}}{2}$

$AB=a$

$DE=x$

$CF=y$

CG = h_a

$\Delta ABC\sim\Delta DEC$

(1) $\frac{a}{x}=\frac{h}{y}$

Из услова задатка следи

(2) $\frac{a\cdot h}{2}=2\cdot\frac{x\cdot y}{2}$

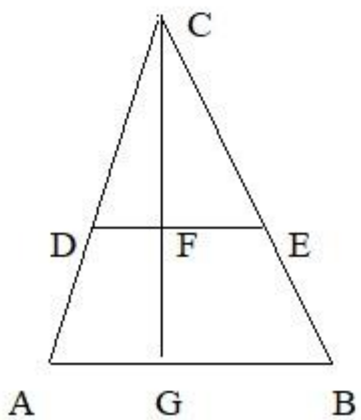
Из добијених једнакости (1) $\frac{a}{x}=\frac{h}{y}$ и (2) $\frac{a\cdot h}{2}=2\cdot\frac{x\cdot y}{2}$ *следи*

$y=\frac{h\cdot x}{a}$ и $\frac{a\cdot h}{2}=x\cdot y$

$\Leftrightarrow \frac{a\cdot h}{2}=x\cdot\frac{h\cdot x}{a}$

$\Leftrightarrow x^2=\frac{a^2}{2}$

$\Leftrightarrow x=\frac{a\sqrt{2}}{2}$



Кључ за решење задатака – I   разред републичко 22. мај 2022.

Задатак	Решење
1.	А
2.	В
3.	Г
4.	А
5.	Г
6.	А
7.	Б
8.	В
9.	А
10.	Г