

Ротационо кретање крутог тела

Василије Хаџи-Пурић, I-d
Математичка гимназија, Београд
Јована Хаџи-Пурић, 8-3
ОШ Бранко Радичевић, Земун



Тема рада

- ▶ Тема овог рада је ротација крутог тела.
- ▶ У раду су посебно представљени модели кретања које настаје суперпозицијом.
- ▶ На крају смо описали резултате који су добијени током извођење симулација програмирањем у програмском језику Processing

Значај теме

► ИСТОРИЈА

У седамнаестом веку су Галилео Галилеј, Симон Стевин, Кристијан Хајгенс и Исак Њутн први обликовали науку која проучава механику кретања крутих тела.

► АКТУЕЛНОСТ

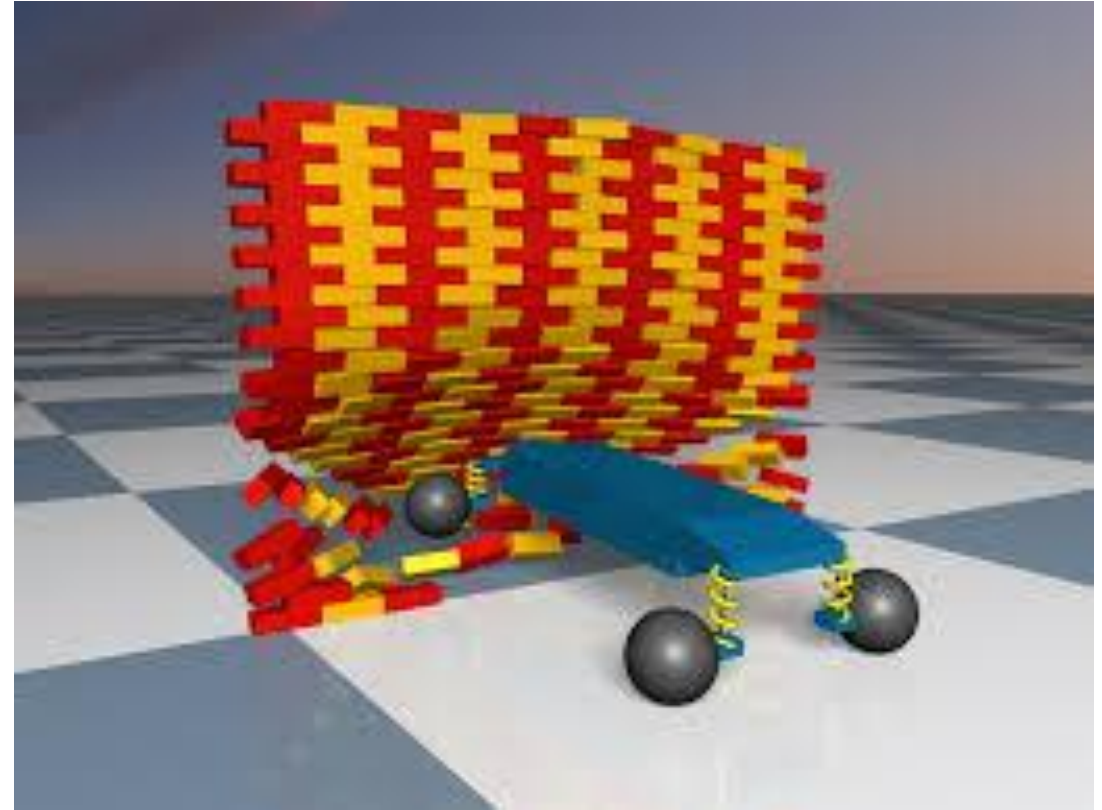
За овај рад су нас инспирисале рачунарске игре: Angry birds, Bad Piggies, где се користи ротација крутог тела.



Значај теме

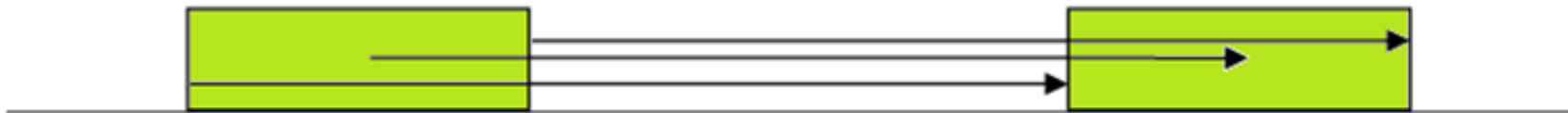
► ПРИСТУПАЧНОСТ

На пример, ако желимо да побољшамо графику видео игара које укључују крута тела, онда као припремна фаза морамо извршити и прорачуне и визуелизацију путања типичних суперпозиција ротационих и транслаторних кретања крутих тела.



Увод

- ▶ Круто тело је тело које има сталан облик и запремину и такође приликом кретања не мења ни облик ни запремину.
- ▶ Круто тело може да се посматра као да је састављено од великог броја ситних делова који су обележени тачкама.
- ▶ Према начину кретања појединих тачака крутог тела, кретање може бити транслаторно и ротационо.



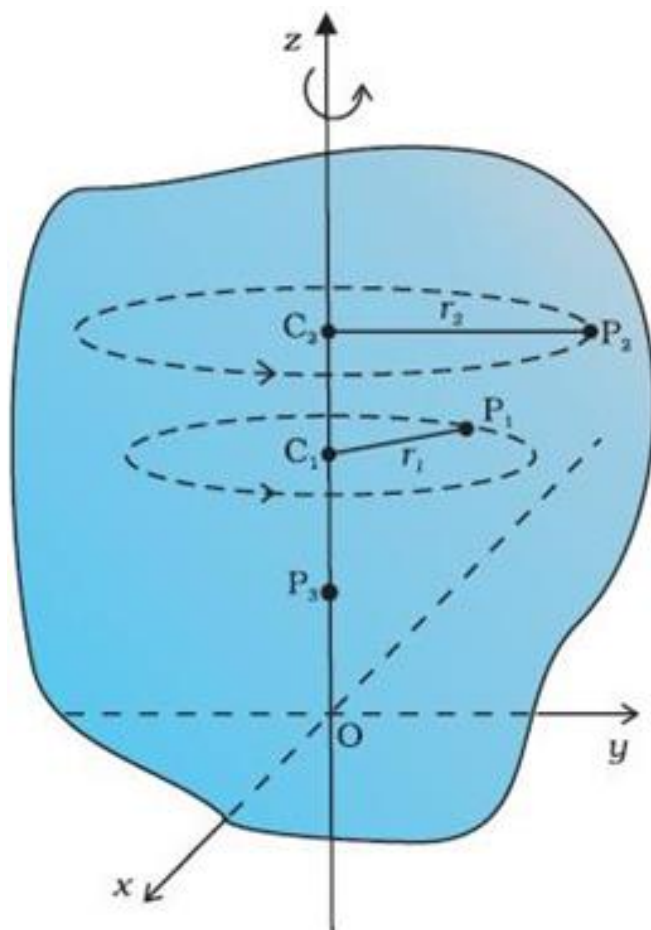
Слика 1: Транслаторно кретање

Транслаторно кретање

Да бисмо могли да издвојимо важне особине ротационог кретања, важно је да се упознамо са основним својствима транслаторног кретања.

При транслаторном кретању крутог тела сви његови делићи крећу се на исти начин и описују исте путање. Путање тачака код овог кретања су паралелне. Тачке за исто време прелазе исте путеве, те су им брзине исте.

У случају променљивог кретања иста су и убрзања свих делића тела. Транслаторно кретање крутог тела произвољног облика и димензија може да се посматра као кретање материјалне тачке.



Ротација крутог тела

- ▶ При ротационом кретању крутог тела, делићи крутог тела се крећу по кружним путањама, а све те кружнице леже у равнима које су међусобно паралелне. Права којој припадају центри свих тих кружница се зове оса ротације. Оса ротације може да пролази кроз тело, а може бити и изван тела.
- ▶ Током ротације крутог тела око осе z , уочавамо да свака тачка тела (нпр. тачке P_1 , P_2) описује кружнице са центрима C_1 или C_2 на оси. Полупречници кружница (r_1 или r_2) су нормална одстојања тачака (P_1 или P_2) од осе. Тачка на оси (нпр. P_3) остаје стационарна.

Историја

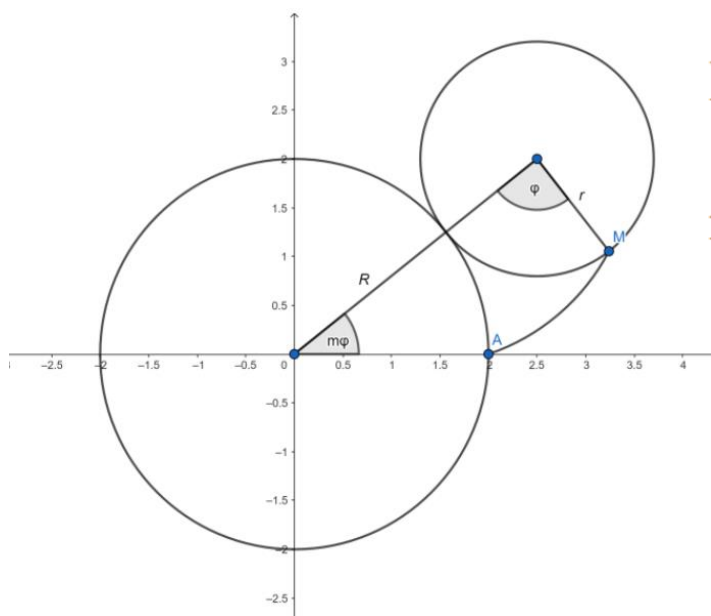
- ▶ Интересовање за ротирајућа материјална тела је постојало и много пре 17.века, али је било каква математичка интерпретација вековима изостајала.
- ▶ Кристијан Хајгенс је 1656. године конструисао The Pendulum Clock, који га је применио на прво апсолутно мерење убрзања гравитације. Он је био први који је дао допринос математичкој анализи ротирајућег тела, додуше за једноставан случај ротације око непокретне осе, али неки од ових радова су објављени тек 1703. године, након његове смрти.

Историја

- ▶ Крај осамнаестог века био је крај периода настанка Њутнове / Ојлерове динамике. Даљи напредак у теорији догодио се током деветнаестог века, када су направљене промене у нотацији.
- ▶ Али након тога, главни подстицај ка проблемима динамике крутог тела почео је да се помера са теорије на примену, са науке на технологију, како су се у „стварном свету“ појавили нови примери којима је било потребно проучавање.
- ▶ Данас се симулације ротације крутих тела користи током дизајна и развоја сензора заснованих на динамици, као што су жirosкопски сензори или током дизајна и развој различитих апликација за побољшање стабилности у аутомобилима.

Суперпозиција ротације диска

Проучимо модела кретања који настаје суперпозицијом тј. проучимо путању коју описује тачка M диска полупречника r , који се котрља без клизања дуж другог фиксног диска полупречника R (слика 2).



Слика 2

Нека је:

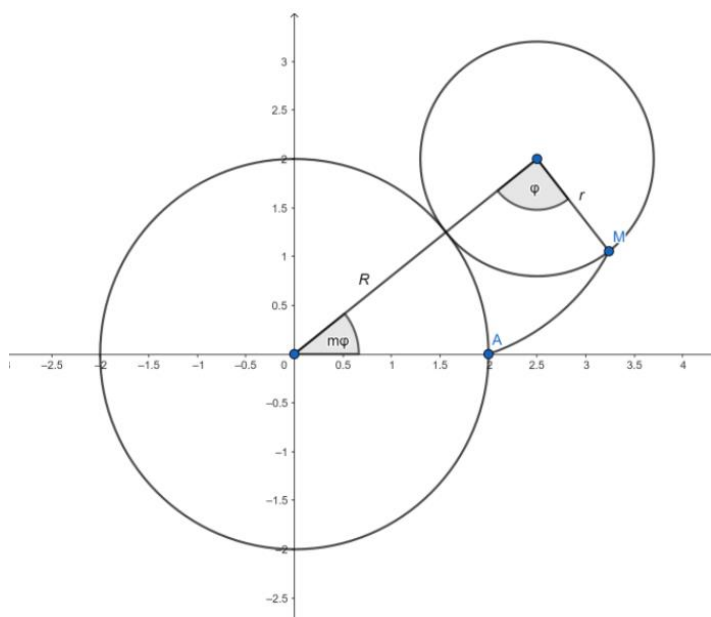
$\varphi = \omega t$ - угао ротације диска,

$m = \frac{r}{R}$, однос полупречника диска и фиксног диска

Суперпозиција ротације диска

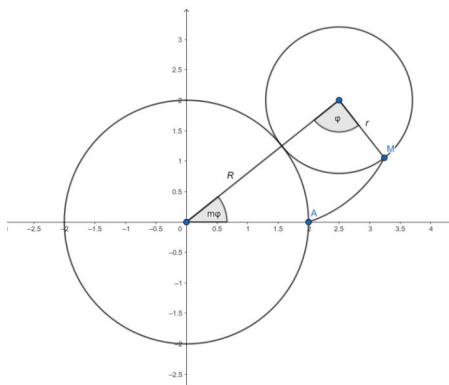
Нека је А почетни положај тачке М. Из геометријских разматрања можемо добити параметарску једначину за путању тачке М:

$$\begin{cases} x = (R + r)\cos m\varphi - r\cos(\varphi + m\varphi) \\ y = (R + r)\sin m\varphi - r\sin(\varphi + m\varphi) \end{cases}$$



Слика 2

Суперпозиција ротације диска

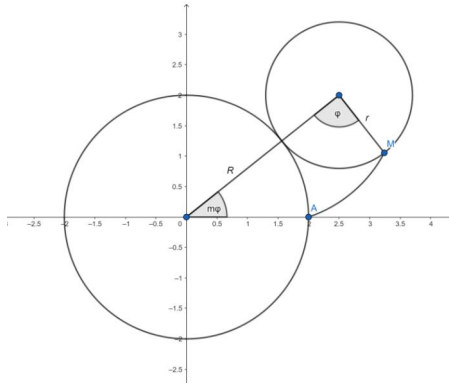


Тип путање је у потпуности одређен параметром m . Ако је овај параметар рационалан број $m=r/q$ (r, q су цели бројеви), онда је путања затворена.

По непомичном диску радијуса R се равномерно котрља други диск радијуса r без проклизавања. Трајекторија једне изабране тачке која лежи на ободу диска (r) који се котрља је скицирана око зелено обојеног диска радијуса R .

Када нема проклизавања између тела која су у контакту, брзине додирних тачки (тј. површина) су једнаке.

Суперпозиција ротације диска



У описаном примеру се налазе 2 диска који се додирују у једној тачки.

$$\omega = \frac{\theta}{t}$$

где је θ описани угао. Одатле може да се изведе формула за брзину.

Брзина те тачке износи:

$$v = \omega_1 R = \omega_2 r$$

где је ω_1 угаона брзина већег диска полупречника R , а ω_2 угаона брзина мањег диска полупречника r .

Рачунарска симулација

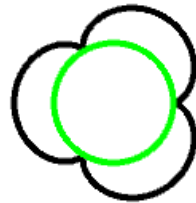
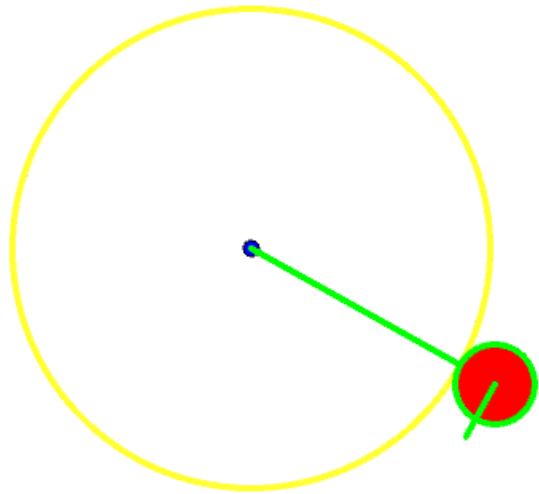
Формулација проблема:

Скицирати трајекторије ротације једног тела ако су односи њиховог полупречника:

- а) $r : R = 1 : 3$
- б) $r : R = 1 : 2$
- в) $r : R = 2 : 3$
- г) $r : R = 1 : 4$
- д) $r : R = 2 : 1$
- ђ) $r : R = 3 : 2$

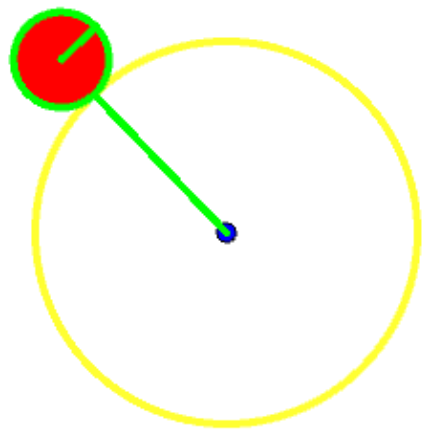
a) $r:R=1:3$

$R=150.0$
 $r=50.0$



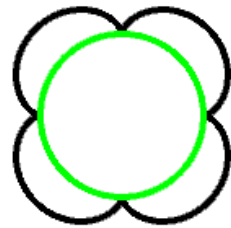
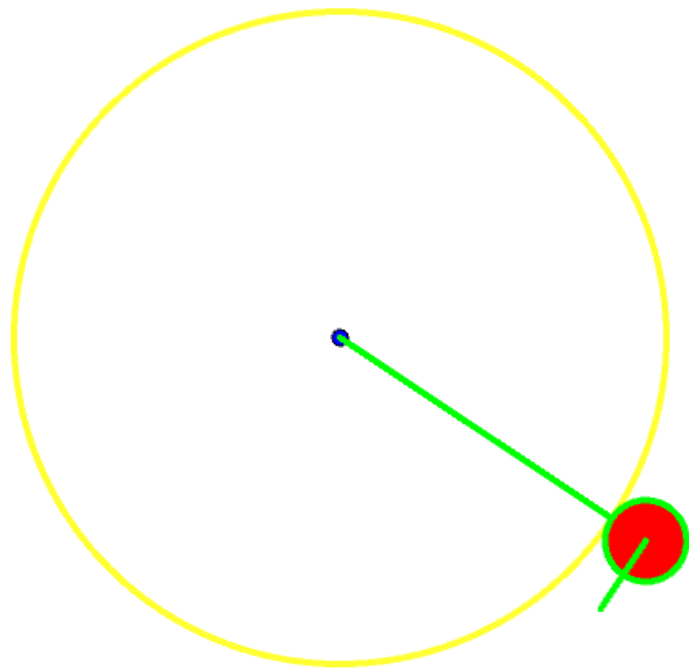
6) $r:R=1:2$

$R=100.0$
 $r=50.0$



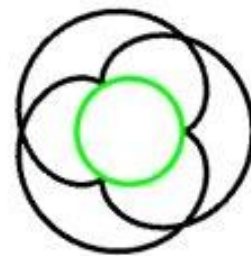
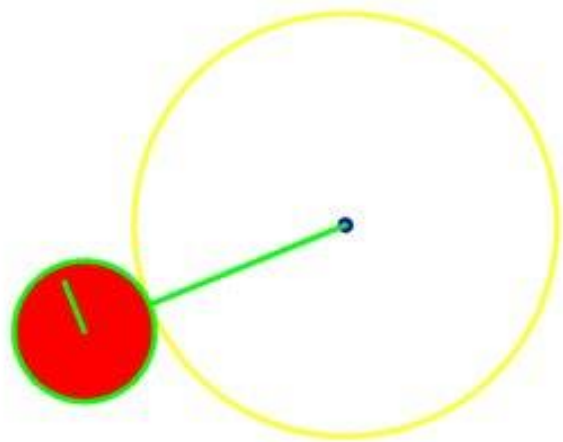
$\Gamma) r:R=1:4$

$R=200.0$
 $r=50.0$



B) $r:R=2:3$

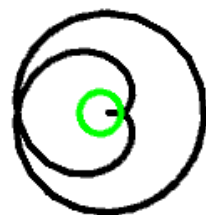
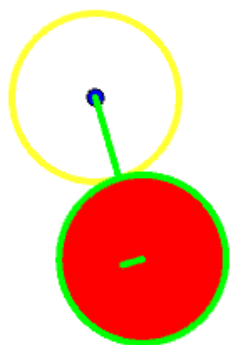
$R=150.0$
 $r=100.0$



д) $r:R=2:1$

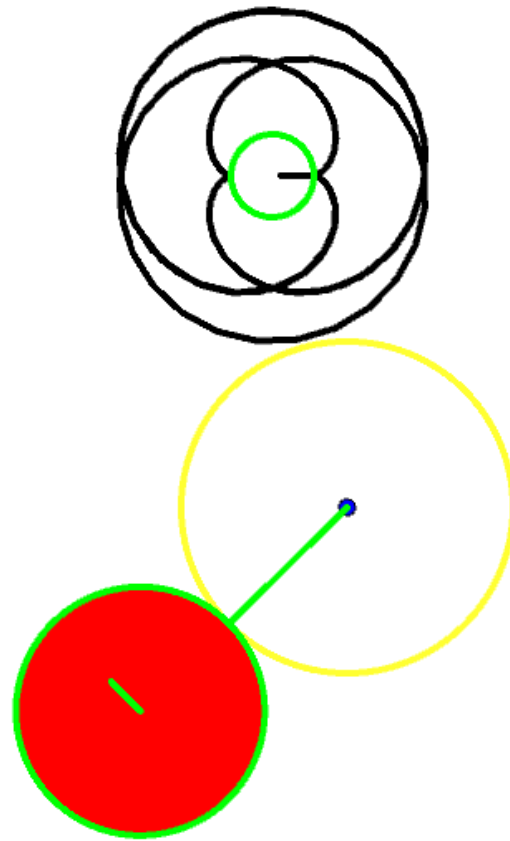
$R=50.0$

$r=100.0$



h) $r:R=3:2$

$R=100.0$
 $r=150.0$



Имплементација у програмском језику Processing

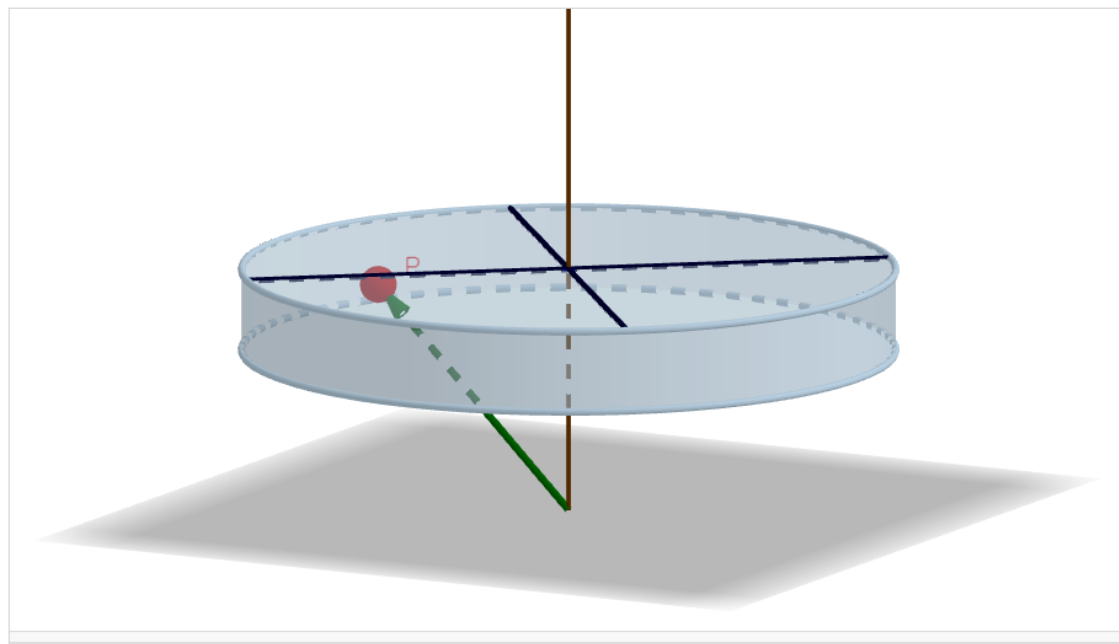
```
1 import processing.serial.*;
2 Serial mbitPort;
3 final int LINE_FEED=10;
4 float xyz=5;
5 PShape telo,centar;
6 float w=1,fi=0;
7 float R,r;
8 PVector v,a;
9 PVector vc;
10 PVector polozajC;
11 static final float RAZMERA=2;
12 trajektorija k;
13 float px,py;
14 float ppx,ppy;
15 float W=w*R/r,FI=0,maxi=W*r,t=0;
16 float m;
17 boolean spreman1=true,spreman2=true;
18 PFont f;
19 float VXS=5,VYS=0;
20
```

Имплементација у програмском језику Processing

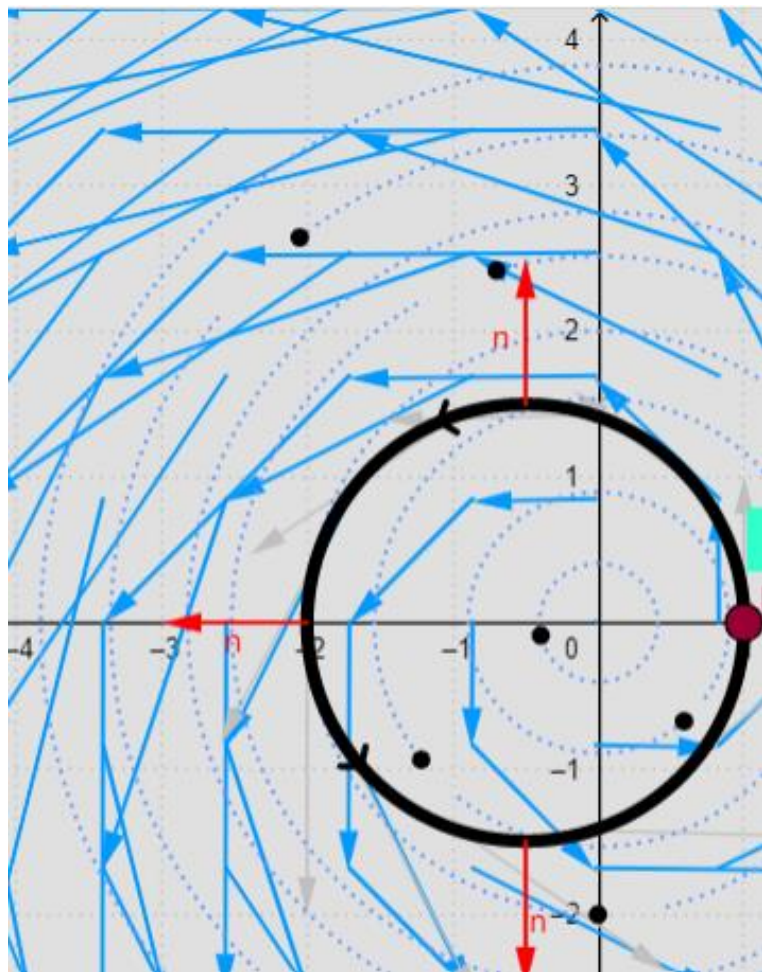
```
21 void setup(){
22   R=150;r=50;
23   //size(1400,800,P2D);
24   fullscreen(P2D);
25   ellipseMode(CENTER);
26   telo=createShape(ELLIPSE,0,0,r,r);
27   telo.setFill(color(255,0,0));
28   centar=createShape(ELLIPSE,0,0,10,10);
29   centar.setFill(color(0,0,255));
30   v=new PVector(w*R,0);
31   a=new PVector(0,w*w*R);
32   vc=new PVector(VXS,VYS);
33   polozajC=new PVector(R,height/2);
34   k = new trajektorija(new PVector(width/2, 50));
35   frameRate(30);
36   px=ppx=width/2+vc.x;
37   py=ppy=height/4+vc.y;
38   f=createFont("Arial",32);
39
40   println(Serial.list());
41   mbitPort=new Serial(this, Serial.list()[0].toString(), 115200);
42   mbitPort.bufferUntil(10);
43   m=r/R;
44
45 }
```

Имплементација у програмском језику Processing

```
57 if(spreman1==false || spreman2==false){vc.x=0;vc.y=0;}
58 else if(spreman1 && spreman2 && zidX==false && zidY==false) {vc.x=VXS;vc.y=VYS;}
59 else if(spreman1 && spreman2 && zidX==true && zidY==false) {vc.x=-VXS;vc.y=VYS;}
60 else if(spreman1 && spreman2 && zidX==false && zidY==true) {vc.x=VXS;vc.y=-VYS;}
61 else if(spreman1 && spreman2 && zidX==true && zidY==true) {vc.x=-VXS;vc.y=-VYS;}
62   k.dodaj(px,py,ppx,ppy);
63   k.run();
64   ellipseMode(CENTER);
65   stroke(0,255,0);
66   ellipse(width/2,height/4,R/2,R/2);
67   translate(polozajC.x,polozajC.y);
68   polozajC.add(vc);
69   if(polozajC.x+R>width){vc.x*=-1;zidX=!zidX;polozajC.x=width-R;}
70   if(polozajC.x-R<0){vc.x*=-1;zidX=!zidX;polozajC.x=R;}
71   if(polozajC.y+R>height){vc.y*=-1;zidY=!zidY;polozajC.y=height-R;}
72   if(polozajC.y-R<0){vc.y*=-1;zidY=!zidY;polozajC.y=R;}
73   ppx=px;ppy=py;
74   PVector tv= PVector.div(vc,frameRate*RAZMERA);
75   t+=tv.mag();
76   /*
77   px=(polozajC.x+(R+r)*cos(t*m)-r*cos(t+t*m));//+5*vc.x vec uracunato
78   py=(polozajC.y+(R+r)*sin(t*m)-r*sin(t+t*m));
79   */
80   px=width/2+((R+r)*cos(t*m)-r*cos(t+t*m))/4;//+5*vc.x vec uracunato
81   py=height/4+((R+r)*sin(t*m)-r*sin(t+t*m))/4;//+5*vc.y
```



Могућа унапређења и будући рад



Могућа унапређења
и будући рад

- ▶ Ротација крутих тела је веома важна код анализе рада роботских система или свемирских објеката који су по својој природи комплексни системи, те захтевају да користимо радије симулације ротације, јер је извођење експеримената уживо или захтевно или прескупо да би се оглед поновио.
- ▶ Такође савремени биомеханички хуманоидни системи захтевају велики број тренинг података претходно извршених биомеханичких анализа моторике животиња или људи, те је и зато потребно извршити симулацију ротације крутих тела
- ▶ Овај рад зато циља да помогне у свим горе наведеним доменима примене ротације кретања крутих тела, јер предлагемо да на основу проучавања математичког модела и закона физике приступимо визуелизацији кретања користећи интегрисане калкулаторе.

Закључак

Захвалност

Захваљујемо се РЦТ Михајло Пупин Панчево, и нашим професорима Милану Сурли и Слободану Тршек који су нам држали наставу.

Желимо да искажемо захвалност свима другарима који су нам помогли да памтимо Идвор 2023 по шалама, али и читању књижевних дела :-)

Литература

1. Мићо М. Митровић, 2020, *Физика 7*, уџбеник за седми разред основне школе, Сазнање, Београд
2. Мићо М. Митровић, 2020, ЗБИРКА ЗАДАТАКА ВЕЗАНИХ ЗА ТАКМИЧЕЊА ИЗ ФИЗИКЕ (1990 - 1995) , Сазнање, Београд
3. <http://visual.merriam-webster.com/science.php> (датум последњег приступа 1.3.2023.)
4. Г. Л. Димић и С. Жегарац “Збирка задатака из физике Ц - Средњи курс”, Београд (1998)
5. С. Д. Варламов, В.И. Зинковский, и М.В.Семёнов “Задачи Московских городских олимпиад по физике (1986-2005)”,
6. Е. И. Бутиков, А. А. Быков, и А. С. Кондратьев “Физика в примерах и задачах”, Петроглиф Москва (2015)
7. Р. J. Nahin “In Praise of Simple Physics”, Princeton University Press (2016)

I just love the way the
Earth rotates...



It really makes my day

Хвала
на пажњи!

Имате ли питања?